**Zderzenia idealnie sprężyste kul w dwóch wymiarach**

**1. Obliczanie prędkości po zderzeniu**

Aby rozwiązać ogólny problem zderzenia idealnie sprężystego (ze współczynnikiem resuscytacji równym jedności) w przestrzeni dwuwymiarowej, a więc na płaszczyźnie, najpierw należy rozpatrzyć je w jednym wymiarze.

**Zderzenie idealnie sprężyste w jednym wymiarze**

Dwie kule o masach , i prędkościach , poruszają się wzdłuż tej samej prostej. Gdy dochodzi do kolizji, prędkości po zderzeniu , możemy wyliczyć korzystając z zasady zachowania pędu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Ze względu na charakter zderzenia - zderzenie idealnie sprężyste - spełniona jest również zasada zachowania energii. Może zmienić się energia kinetyczna poszczególnych obiektów, ale sumaryczna wartość układu musi być zachowana:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aby uzyskać wartości prędkości tuż po zderzeniu, należy rozwiązać układ równań (1)-(2) względem i :

Dla :

dla

*.. doprowadzenie do wyniku dla obu prędkości końcowych (3)-(4) - prośba o wskazówkę*

Ostatecznie otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek ogólny**

W przypadku ruchu kul na płaszczyźnie, ruch musi być opisany przy pomocy wektorów przestrzeni . Mając dane wektory prędkości przed zderzeniem określone jako:

wektory po zderzeniu określamy analogicznie:

mając na uwadze ich zależność od wektorów przed zderzeniem. Celem jest obliczenie wektorów po zderzeniu.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest wzięcie pod uwagę punktu styku kul w momencie zderzenia oraz rozłożeniu wektorów prędkości w kierunku:

- normalnym

- oraz stycznym

do powierzchni stykających się kul.

Oznaczając współrzędne środków okręgów jako i , wektor normalny jednostkowy do okręgu pierwszego w punkcie styczności będzie miał postać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

natomiast wektor styczny:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Zakładając, że powierzchnie obu kul są idealnie gładkie możemy wyjść z założenia, że po zderzeniu zmianie ulegną jedynie składowe prędkości normalne. Możemy więc potraktować zachowanie składowych normalnych jak w przypadku zderzenia jednowymiarowego.

Obliczenia należy rozpocząć od wykonania rzutów wektorów prędkości , na osie lokalnego układu współrzędnych wyznaczonego przez wektor normalny i styczny :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie oznacza iloczyn skalarny, a więc:

Zgodnie z założeniami, składowe styczne przed i po zderzeniu pozostaną bez zmian:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Natomiast składowe normalne zmienią się zgodnie ze wzorami (3)-(4) dla przypadku jednowymiarowego dla kierunku wyznaczonego przez wektor normalny:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aby uzyskać wartości wektorów w pierwotnym układzie współrzędnych, prędkości należy przetransformować:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek szczególny (identyczne kule)**

W przypadku zderzeń jednakowych kul, wzory (3)-(4) zostaną bardzo uproszczone ze względu tą samą wartość masy :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

a więc poszczególne składowe (8)-(11) w równaniach (12)-(13) będą wynosić odpowiednio:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek szczególny (zderzenie ze ścianą)**

Z kolei w przypadku zderzenia kuli ze ścianą, korzystając ze wzorów (3)-(4) i biorąc pod uwagę, że dla kuli o małej masie i prędkości i ścianie o bardzo dużej masie pozostającej w spoczynku ():

Oznacza to, że po zderzeniu kuli ze ścianą, ściana pozostanie nadal nieruchoma (co jest raczej intuicyjne), a kula będzie poruszać się z wektorem prędkości o składowych:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Co dla przykładowego odbicia od ściany pionowej, leżącej na prawej krawędzi obszaru będzie oznaczało jedynie zmianę składowej x-owej na przeciwną.

**2. Detekcja zderzenia w dwóch wymiarach**

Kule mają różne masy, promienie oraz prędkości i położenia początkowe. N kul umieszczonych jest w prostokątnym pudle o zadanych wymiarach, ograniczonym dwoma ścianami pionowymi i poziomymi. Założeniem symulacji jest brak sił zewnętrznych działających na kule, a więc pomiędzy zderzeniami kule poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Wszelkie zderzenia zostały uproszczone do zderzenia dwóch obiektów. W przypadku zderzeń wielu obiektów, zostają one rozpatrzone po kolei jako sekwencja zderzeń dwóch obiektów.

W symulacji występują dwa rodzaje zderzeń:

- zderzenie kula-kula

- zderzenie kula-ściana

Każdy z przypadków należy rozpatrzyć osobno.

Jednym z kluczowych zadań symulacji jest detekcja kolejnego zderzenia, a więc określenie czasu, w którym ono nastąpi. Wykorzystany algorytm przedstawia poniższy schemat:

1. Dla -tej kuli, gdzie , znajdź czas, dla którego nastąpi zderzenie z każdą ze ścian, w kierunku których kula porusza się.
2. Znajdź najmniejszą wartość czasu i zapamiętaj jako
3. Dla każdej pary kul, jeżeli nastąpi pomiędzy nimi zderzenie, oblicz czas zderzenia.
4. Znajdź najmniejszą wartość czasu i jeżeli jest mniejszy od , ustaw nową wartość zmiennej.

Opis działania dla punktów 1) oraz 3) przedstawiono poniżej.

**Zderzenie typu kula-ściana**

Ponieważ kule znajdują się w prostokątnym pudle o czterech różnych ścianach, w przypadku zderzenia kula-ściana należy określić, która ze ścian będzie uczestniczyć w zderzeniu. W tym celu można wykorzystać informację o kierunku ruchu kuli zawartą w jej wektorze prędkości. Ponieważ symulacja jest wyświetlana na monitorze, układ współrzędnych został przyjęty zgodnie z układem ekranu. Jeżeli składowa x-owa prędkości kuli jest dodania, kula porusza się w kierunku prawej ściany. Jeżeli jest mniejsza, w kierunku lewej. Z kolei w przypadku składowej y-owej, dodatnia wartość oznacza ruch w kierunku ściany dolnej, a ujemna w kierunku ściany górnej.

Dysponując powyższą informacją można określić, z którą ze ścian nastąpi kolejne zderzenie. W kolejnym kroku należy wyliczyć czas zderzenia. Przykładowo dla zderzenia ze ścianą dolną, jeżeli kula o promieniu znajduje się w odległości od krawędzi ściany (mierząc od środka kuli), a jej prędkość wynosi:

Kula poruszając się ruchem jednostajnym prostoliniowym pokona dystans do ściany:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

w czasie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Następnie prędkość kuli po zderzeniu ze ścianą można wyliczyć ze wzorów (20)-(21).

**Zderzenie typu kula-kula**

W przypadku dwóch kul o prędkościach , zderzenie nastąpi w momencie, gdy odległość pomiędzy środkami kul będzie równa sumie ich promieni. Oznaczając współrzędne środków okręgów jako i oraz korzystając z faktu, że poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dystans można określić jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Równanie (24) można doprowadzić do postaci równania kwadratowego względem niewiadomego czasu :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Rozwiązując równanie (25) względem należy rozpatrzyć tylko te przypadku, w których , ponieważ w przeciwnym razie kule nie zderzą się. Z wyliczonych czasów , należy wybrać mniejszy, ale równocześnie większy od 0. Mając dany czas, prędkości kul po zderzeniu można wyliczyć ze wzorów (12)-(13).

**3. Algorytm**

Ogólny algorytm symulacji łączy wcześniejsze zagadnienia w następujących krokach:

1. Wyznacz czas najbliższego zderzenia (zgodnie z sekcją drugą)
2. Przesuń kule do najbliższego zderzenia
3. Wykonaj obliczenia potrzebne do przebiegu zderzenia (zgodnie z sekcją pierwszą)
4. Wróć do pierwszego kroku